**Prof. Dr. Alfred Toth**

# Die Menge der REZ-Ausdrücke als Theorie

1. Nach der allgemeinen Modelltheorie versteht man unter der Menge aller Ausdrücke einer Sprache L, die aus einer gegebenen Teilmenge von Ausdrücken $S \subset L$ folgen, die Folgerungsmenge von S (in L) (vgl. Schwabhäuser 1970, S. 39). Man erhält diese Folgerungen von S durch einen Hüllenoperator H (über L), für den die Eigenschaften der Extensivität (i), Monotonie (ii) und Abgeschlossenheit (iii) gelten (Schwabhäuser 1970, S. 40):

(i) $S \subset H(S)$

(ii) $(S_1 \subset S_2) \rightarrow H(S_1) \subset H(S_2)$

(iii) $H(H(S)) \subset H(S)$.

2. Im folgenden gehen wir aus von der allgemeinen (n, m)-stelligen REZ-Relation

${}^{m}{}_{n}R_{REZ} := [[1, a], [[1_{-1}, b], [1_{-2}, c]], ..., [_{n} 1_{-(n-1)}, m],$

d.h. wir können durch Einsetzen von Werten für n die Tiefe der relationalen Einbettungen und durch Einsetzen von Werten für m die Stelligkeit der Partialrelationen bestimmen. Setzen wir z.B. m = n = 3, so bekommen wir

${}^{3}{}_{3}REZ = [[1_{-2}, a], [1_{-1}, b], [1, c]],$

also die REZ-Variante der Peirce-Benseschen Zeichenrelationen, deren allgemeine Form üblicherweise als ZR = (3.a, 2.b, 1.c) dargestellt wird. Wie immer wir jedoch m und n wählen, ob wir als Zahlbereich die natürlichen, reellen oder komplexen Zahlen wählen (vgl. Toth 2012a), an der Relation ${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ selbst ändert sich dadurch gar nichts, d.h. sie bleibt eine abstrakte systemische Relation, die u.a. Zeichenhaftes repräsentiert, jedoch nicht nur Zeichenhaftes. Ihre Struktur ist darum universell im doppelten Sinne des Wortes: maximal allgemein und ein Universum betreffend. Nur ist dieses systemische Universum umfassender als das "Universum der Zeichen" (Bense 1983; 1986, S. 17 ff.).

3. Geht man nun allerdings von ${}^{3}{}_{3}$ REZ aus, so findet man die vier folgenden nicht-isomorphen Strukturen

1. ${}^{3}{}_{3}$ REZ = $[[1_{-2}, a], [1_{-1}, b], [1, c]]$

2. ${}^{3}{}_{3}$ REZ = $[[a, 1_{-2}], [b, 1_{-1}], [c, 1]]$

3. ${}^{3}{}_{3}$ REZ = $[[1, c], [1_{-1}, a], [1_{-2}, b]]$

4. ${}^{3}{}_{3}$ REZ = $[[c, 1], [b, 1_{-1}], [a, 1_{-2}]]$.

Wie ich jedoch in Toth (2012b) gezeigt hatte, ändert auch dies nichts daran, daß man im allgemeinen systemischen Universum, wie es durch ${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ definiert ist, verbleibt. Aus ${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ gibt es somit ebenso wenig wie aus ${}^{3}{}_{3}R_{REZ}$ eine Transzendenz, die in einen anderen "Realitätsbereich" oder dergl. führt. Der Übergang von ZR zu ${}^{3}{}_{3}R_{REZ}$ bringt also, um es nochmals zu unterstreichen, "lediglich" viel größere Abstraktion in die mathematische Semiotik.

Betrachten wir also nochmals (vgl. Toth 2012c) die Operatoren, welche die 4 oben unterschiedenen Strukturen erzeugen, nehmen wir hierzu aber die Peirce-Bense-schen Darstellungsweise:

1. (3.a 2.b 1.c) := G

2. (3.a 2.b 1.c)° = (1.c 2.b 3.a) := $K_1$

3. $\times$(3.a 2.b 1.c) = (c.1 b.2 a.3) := $K_n$

4. $\times$(3.a 2.b 1.c)° = (a.3 b.2 c.1) := KD = DK

Wie man erkennt, werden die 4 Strukturen aus einer Grundstruktur G sowie zwei Operationen K und D sowie deren (dualidentische) Kombination erzeugt. Im Falle von ${}^{3}{}_{3}R_{REZ}$ fällt allerdings $K_1$ mit einer der 3! = 6 Permutationen und $K_n$ mit der Dualisationsoperation zusammen (vgl. zu n>3-stelligen REZ-Relationen Toth 2012b). Dennoch führen auch die Operatoren $K_1$ und $K_n$ nicht aus dem systemischen REZ-Universum hinaus, denn wie man ohne weitere Begründung sehr leicht sieht, ist $K_m$ für $m \in \{1, ..., n\}$ ein Hüllenoperator im Sinne der Modelltheorie. Daher sind aber auch alle durch H erzeugten "Folgerungen" aus ${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ bereits in

${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ enthalten, und ${}^{m}{}_{n}R_{REZ}$ stellt daher im Sinne der Modelltheorie ein Theorie dar (vgl. noch Schwabhäuser 1970, S. 40).

Literatur

Schwabhäuser, Wolfram, Modelltheorie, Bd. I. Mannheim 1970

Toth, Alfred, Relationale Einbettungszahlen und komplexe Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Zur Frage der Realitätsthematiken in REZ-Relationen. : Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Toth, Alfred, Weshalb die Semiotik 4-wertig sein könnte. : Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012c

28.2.2012